PROBEKLAUSUR zu den Rechenmethoden der Physik II

Zeit: 90 Minuten. Ab ≥ 12 Punkten gilt die Probeklausur als bestanden.
Hilfsmittel: 1 Blatt DIN A4 – einseitig beschrieben – mit Ihren Aufzeichnungen.

[PK1] *10 Kurzfragen* **($10 \times 0{,}5 = 5$ Punkte)**

(a) $\vec{x} = \vec{x}(\vec{u})$ vollständig invertierbare Koordinatenabbildung, $\mathrm{Jac}_{\vec{x}}\vec{u} \cdot \mathrm{Jac}_{\vec{u}}\vec{x} = ?$

(b) Schwerpunkt $\vec{R}$ eines Kegels um die z-Achse, $R_x = ?$

(c) $(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r)\phi(r) = (\frac{1}{r}\partial_r^2 r)\phi$, wie kam das heraus?

(d) $V(x,y) = e^{xy}$, wie lautet das Potential um das Minimum $(0,0)$ bis einschließlich zweiter Ordnung?

(e) $\dot{v} = 3t^2 - 3t^2 v$. $v(t) = ?$

(f) 1D-Wellengleichung hinschreiben, deren allgemeine Lösung?

(g) $\delta(x) = \alpha e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}, \alpha = ?$

(h) Wie folgt die Konti aus den Maxwell-Gleichungen?

(i) Wie lautet die Green'sche Funktion $G(\vec{r})$ zum Laplace-Operator?

(j) Wie lautet die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ eines homogen geladenen Stabes, welcher sich ab $y = 0$ entlang der y-Achse erstreckt?

[PK2] *Rotationsparaboloid* **($1 + 3 = 4$ Punkte)**

Die Fläche eines Rotationsparaboloiden mit Radius R und Höhe $h = \frac{a}{2}R^2$ sei durch

$$z(x,y) = \frac{a}{2}(x^2 + y^2)$$

gegeben.

(a) Man skizziere den Körper und wähle eine geeignete Parametrisierung $\vec{x}(\vec{u})$.

(b) Man berechne via

$$F = \int \mathrm{d}^2 u \sqrt{\det(g_{ij})}$$

die Oberfläche des Körpers, wobei g_{ij} die Metrik ist und sich aus den Skalarprodukten $\vec{t}_{u_i} \cdot \vec{t}_{u_j}$ der Tangentialvektoren $\vec{t}_{u_i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}$ zusammensetzt.

[PK3] *Diffusion und Wellen* **($2 + 2 = 4$ Punkte)**

(a) Eine Teilchendichte sei zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$n(x,0) = n_1 - n_0 \cos(2kx)$$

Wie lautet die zeitliche Entwicklung $n(x,t) = ?$ Skizze!

(b) Die kugelsymmetrische Wellengleichung lautet bekannterweise

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) n(r,t) = 0$$

Man löse diese mit Hilfe eines Separationsansatzes $n(r,t) = f(r)g(t)$ und zeige, dass die Lösungen Kugelwellen sind!

[PK4] *Ebene elektromagnetische Welle* **(1 + 2 + 2 = 5 Punkte)**

Im Vakuum hat das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{x},t)$ einer ebenen, elektromagnetischen Welle die Form

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \mathfrak{Re}\left(\vec{B}_0 e^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right).$$

(a) Welche Bedingung müssen die komplexe Amplitude $\vec{B}_0$ und der Wellenvektor $\vec{k}$ erfüllen?

(b) Welchen Wert hat ein zugehöriges elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x},t)$?

(c) Welchen Wert hat die Kreisfrequenz ω?

[PK5] *Yukawa-Potential* **(1 + 1 + 2 = 4 Punkte)**

Gegeben ist das Yukawa-Potential

$$\phi(\vec{x}) = \phi(r) = \frac{q}{r}e^{-\kappa r}$$

in Kugelkoordinaten.

(a) Man berechne das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}$.

(b) Wie lautet die zugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$?

(c) Welche Gesamtladung Q befindet sich in einer Kugel (Radius R) um den Ursprung?

Hinweis: Man beachte Besonderheiten bei $r = 0$ für $\Delta\frac{1}{r}$!

[PK6] *Stromdurchflossener Leiter* **(2 + 1 + 1 = 4 Punkte)**

Ein Leiter mit Radius R entlang der z-Achse werde von einem konstanten Strom $\vec{\jmath}(\vec{x})$ durchflossen.

(a) Man berechne mit einem geeigneten Ansatz das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$ innerhalb und außerhalb des Drahtes.

(b) Wie lautet das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$?

(c) Man berechne den Poynting-Vektor $\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$ und seine Divergenz $\nabla\vec{S}$. Wie ist das Ergebnis zu interpretieren?

Viel Spaß und natürlich: VIEL ERFOLG!